黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

Lebesgueの収束定理について

実数値函数のケースでは教科書によく書いてあるように

単函数による近似による積分のwell-definedness＆非負実数の無限和が順序によらないこと
⇒Beppo Leviの単調収束定理
⇒Fatouの補題
⇒Lebesgueの収束定理

なのですが、ちょっと面倒なのは積分がwell-definedであることを示す部分だけのような気がしないでもない。そこさえ通過すれば易しいと言ってよいと思う。

私が参照しているのは、前にも紹介しましたが、これもまた品切れの

猪狩惺『実解析入門』
amazon.co.jp/dp/4000054449
mathtod.online/users/genkuroki…

2017年05月24日 21:11 · Web · 0 · 2 · Webで開く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 24
ものすごく単純化して、単調収束定理の級数版の証明のアイデアを説明

すでに積分が定義されている非負単函数(simple function) u_i によって $f=\sum_i u_i$ と f が表わされているとき、f の積分を

$$\int f = \sum_i \int u_i$$

で定義できる(非自明)。

u_{ij} は非負単函数で、

$$f_i = \sum_j u_{ij}, \quad f = \sum_i f_i$$

のとき、積分の定義より

$$\int f = \sum_i \sum_j \int u_{ij} = \sum_i \int f_i.$$

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 24

単調収束定理：非負可測函数の単調増加列 f_n について

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n.$$

これは返答連鎖の一つ前の結果を使えば出る.単調収束定理：非負可測函数の単調増加列 f_n について

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n.$$

これは返答連鎖の一つ前の結果を使えば出る.

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 24

Fatouの補題：非負可測函数列 f_n について

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leqq \liminf_{n\to\infty}\int f_n.$$

証明：$n \geqq k$ のとき

$$\int \inf_{n\geqq k} f_n \leqq \int f_n$$

なので

$$\int \inf_{n\geqq k} f_n \leqq \inf_{n\geqq k}\int f_n \leqq \liminf_{n\to\infty}\int f_n.$$

$\inf_{n\geqq k} f_n$ は k について単調なので単調収束定理より

$$\lim_{k\to\infty}\int \inf_{n\geqq k} f_n = \int \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

以上を合わせるとFatouの補題が得られる. q.e.d.

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 24

Lebesgueの収束定理：f_n は f に各点収束する実数値可測函数列であり, ある非負の可測函数 φ で

$$\int \varphi < \infty, \quad |f_n| \leqq \varphi$$

を満たすものが存在すると仮定する. このとき

$$(*) \quad \lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f.$$

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 24

証明：$\varphi \pm f_n$ は非負なのでFatouの補題をそれらに適用すると

$$
\begin{aligned}
&\int \varphi \pm \int f \\
&= \int (\varphi \pm f) \\
&= \int \lim_{n\to\infty} (\varphi \pm f_n) \\
&\leqq \liminf_{n\to\infty} \int (\varphi \pm f_n) \\
&= \int \varphi \mathop{\begin{matrix} +\liminf \\ -\limsup \end{matrix}}_{n\to\infty} \int f_n
\end{aligned}
$$

より

$$\int f \leqq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \leqq \limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqq \int f.$$

ゆえに(∗)が成立する. q.e.d.

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 24

普通は、何はともあれ、積分と極限は自由に交換して計算するよね。

私の経験では、数学科の学生の場合には、論理的能力がまだ未熟な学生の方がそういう計算が苦手な感じがします。

極限の交換を正当化する自信がないせいで、テキトーな計算もできなくなる罠にはまっていたりする。

まずは極限を交換する計算をしてみて、その結果が好ましいものなら後でゆっくり極限の交換の類を正当化する議論を考えればよいです。

つまらない計算の論理的正当化のために時間を使う必要はない。自分が面白いと思った場合にだけ労力を使えばよいです。

しかし、毎日数学を勉強しれいれば毎日のように面白い計算に出会うので必然的に論理的正当化のスキルも上達して行く。